

金融資産市場と公的過剰債務

Financial Asset Markets and Public Debt Overhangs

村 田 治

In this paper, we theoretically show the relationship between public debt GDP ratio and GDP growth rate. Particularly, we derive the inverted U shape relation between them. To do so, we introduce into the model financial asset market and focus on the elasticity of substitution among the assets. We assume that from the view of safety of financial assets, public debt is elastic for money relatively when the amount of public debt is small and elastic for capital relatively when the amount of public debt becomes larger. This assumption enables us to derive the inverted U shape relation between public debt GDP ratio and GDP growth rate.

Osamu Murata

JEL : E62, E63, H63, O40

キーワード : 公的過剰債務、内生的経済成長、金融資産間の代替性

Keywords : Public Debt Overhangs, Endogenous Economic Growth, Elasticity of Substitution among the Financial Assets

はじめに

わが国の公的債務残高 GDP 比率は 2009 年度以降 200%を超えて増加し続けており、主要先進国の中でも極めて高い値となっている。他方、1991 年のバブル崩壊後の「失われた 20 年」、さらにはリーマンショック後も長期不況の状態が続いている。このような状況の下で、中央銀行は 1999 年 2 月にいわゆるゼロ金利政策へと舵を切り 2001 年 3 月からは量的緩和政策を導入、さらに、2013 年 4 月からの国債等の買い切りオペによる異次元の金融緩和など継続的な金融緩和政策を行っているが必ずしも良好な成果を挙げているとはい

難い。

公的債務残高の GDP 比率の上昇に関して、従来は、長期不況によって GDP 成長率の低下に伴い税収が伸び悩み、他方、景気対策のための財政政策が発動され、公債発行の累増によって公的債務残高 GDP 比率が上昇したと解釈されてきた。しかしながら、近年、Reinhart 等によって、公的債務残高 GDP 比率の上昇が経済成長率を引き下げるという逆の因果関係が指摘されるようになってきた¹⁾。さらに、公的債務残高 GDP 比率のある閾値までは公的債務残高 GDP 比率の上昇は経済成長率を高めるが、この閾値を超える公的債務残高 GDP 比率の上昇（公的過剰債務）は経済成長率の低下を招くなど、両者の間に非線型性が存在するとの実証結果も報告されている²⁾。

村田（2020）においては簡単な内生的成長モデルを用いて、公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の間の非線型性等について、その理論的メカニズムを明らかにした。特に、公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の間の非線型性が生じるためには、Bohn（1998）で提唱された財政赤字の持続可能性条件が大きな役割を果たしていることを明らかにした。

しかしながら、村田（2020）のモデルでは、名目変数と実質変数の区別がなく、また、利子率は資本の限界生産性に等しいと仮定されており、物価上昇率、名目利子率等はモデルから捨象されている。公的債務残高の動きを分析する際に名目利子率がモデルから捨象されているのは大きな欠点である。というのは、一般的には公的債務残高の累増は利子率を上昇させ投資をクラウド・アウトし経済成長率を鈍化させると考えられるからである。先行研究でも論じられているように、公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の間の非線型性には、投資のクラウドینگ・イン効果とクラウドینگ・アウト効果が作用していると考えられる。

本稿では、名目利子率や物価上昇率を明示的にモデルに導入し、金融資産間の代替性によって生じるクラウドینگ・イン効果とクラウドینگ・アウト

1) Reinhart and Rogoff（2010）、Reinhart, Reinhart and Rogoff（2012）等を参照されたい。

2) 例えば、Baum, Checherita-Westphal and Rother（2013）等が挙げられる。

効果によって非線型性が生じることを理論的に明らかにする。その意味では、公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の間の非線型性にとって財政赤字の持続可能性条件は必ずしも必要でないことが示される。

本稿の構成は以下の通りである。まず、第 1 節では、金融資産間の代替性に焦点を当てながら、金融資産の市場均衡式から公的債務残高、マネーストックの名目利子率と物価上昇率への影響を考察する。第 2 節では、利払いを含む政府支出を政策変数とする内生的成長モデルを構築し、同時に、中央銀行の公的債務に対する公開市場操作について議論する。第 3 節では、公的債務に対する公開市場操作をモデルに導入し、マネーストック GDP 比率、あるいは公的債務残高マネーストック比率を政策変数とした場合の経済成長率への影響を分析し、金融資産間の代替性が公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の關係に重要な役割を果たしていることを明らかにする。あわせて名目利子率への影響についても考察したい。

1. 金融資産市場と資産間の代替性

本節では、公的債務残高とマネーストックの名目利子率と物価上昇率への影響について考察するとともに、金融資産間の代替性について分析する³⁾。

(1) 金融資産市場の均衡式

われわれのモデルで、金融資産は貨幣、公的債務、株式の 3 つから構成されているとする。名目公的債務残高を B 、マネーストックを M 、株式の名目価値額を V とすると、名目資産総額 W は、

$$W = M + B + V \quad (1)$$

と表される。ここで、一般物価水準を p 、実質 GDP を Y 、名目利子率を r 、株式の実質収益率を i 、物価上昇率を π とし、貨幣、公的債務、株式の実質需要関数を Tobin (1969) にしたがって、以下のように表そう⁴⁾。

3) 以下の分析は、Cohen and McMenamin (1978)、Friedman (1978) を参考にしている。

4) Tobin (1969) に従い、 $\varepsilon_Y = 0$ と仮定している。

$$M^d/p = \alpha(Y, r, i + \pi, W/p), \quad \alpha_Y > 0, \quad \alpha_r < 0, \quad \alpha_i < 0, \quad \alpha_w > 0 \quad (2)$$

$$B^d/p = \beta(Y, r, i + \pi, W/p), \quad \beta_Y < 0, \quad \beta_r > 0, \quad \beta_i < 0, \quad \beta_w > 0 \quad (3)$$

$$V^d/p = \varepsilon(Y, r, i + \pi, W/p), \quad \varepsilon_Y = 0, \quad \varepsilon_r < 0, \quad \varepsilon_i > 0, \quad \varepsilon_w > 0 \quad (4)$$

さらに、

$$m = M/pY \quad (5)$$

$$b = B/pY \quad (6)$$

$$v = V/pY \quad (7)$$

$$w = W/pY \quad (8)$$

とおき、各需要関数は実質 GDP と実質資産に関して一次同次であると仮定すると、各資産の市場均衡式は、

$$m = \alpha(1, r, i + \pi, w) \quad (9)$$

$$b = \beta(1, r, i + \pi, w) \quad (10)$$

$$v = \varepsilon(1, r, i + \pi, w) \quad (11)$$

となる。ここで、資産制約条件、

$$m + b + v = \alpha(1, r, i + \pi, w) + \beta(1, r, i + \pi, w) + \varepsilon(1, r, i + \pi, w) \quad (12)$$

を考慮するなら、(9)～(11) 式の 3 つの市場均衡式のうち独立な市場均衡式は 2 つとなる。したがって、adding-up condition として、

$$\alpha_Y + \beta_Y + \varepsilon_Y = 0 \quad (13)$$

$$\alpha_r + \beta_r + \varepsilon_r = 0 \quad (14)$$

$$\alpha_i + \beta_i + \varepsilon_i = 0 \quad (15)$$

$$\alpha_w + \beta_w + \varepsilon_w = 1 \quad (16)$$

を得る。

(2) 名目利子率と物価上昇率

ここで、資本ストックを K 、資本の限界生産性を MP と表すと、Tobin の q は、

$$q = V/pK = MP/i \quad (17)$$

と表される。以下では、単純化のために、

$$q = 1 \quad (18)$$

を仮定しよう⁵⁾。次に、生産関数は AK 型であるとして、

$$Y = AK \quad (19)$$

とすると⁶⁾、資本の限界生産性 MP は、

$$MP = \partial Y / \partial K = A \quad (20)$$

となり、(17)(18)(20) 式から、

$$i = A \quad (21)$$

を得る。3つの市場均衡式のうち独立な均衡式は2つであるので、ここでは、貨幣市場と公的債務市場を取り上げよう。(1)(8)(17)(18)(19)(21) 式を考慮するなら、(9)(10) 式は、

$$m = \alpha(1, r, A + \pi, m + b + 1/A) \quad (22)$$

$$b = \beta(1, r, A + \pi, m + b + 1/A) \quad (23)$$

となる。これより、名目利子率と物価上昇率をマネーストック GDP 比率、公的債務残高 GDP 比率について解くと、

$$r = r(m, b) \quad (24)$$

$$r_m = -\{\alpha_i \beta_w + (1 - \alpha_w) \beta_i\} / \Delta < 0 \quad (25)$$

$$r_b = \{\alpha_i (1 - \beta_w) + \alpha_w \beta_i\} / \Delta > 0 \quad (26)$$

5) $q = 1$ を仮定することは、(17) 式から、株式の名目価値額が資本の名目価値に等しいことを意味している。

6) 詳しくは、村田 (2020) を参照されたい。

$$\pi = \pi(m, b) \quad (27)$$

$$\pi_m = \{(1 - \alpha_w)\beta_r + \alpha_r\beta_w\}/\Delta < 0 \quad (28)$$

$$\pi_b = -\{\alpha_r(1 - \beta_w) + \alpha_w\beta_r\}/\Delta \quad (29)$$

$$\Delta = \alpha_i\beta_r - \alpha_r\beta_i < 0 \quad (30)$$

を得る⁷⁾。ここで、マネースtock GDP 比率と公的債務残高 GDP 比率の変化に対する物価上昇率 π の変化は株式の名目収益率 $A + \pi$ の変化を表しており、マネースtock GDP 比率が上昇した場合、名目利子率と同様に株式の名目収益率が低下する。また、公的債務残高 GDP 比率の上昇は、公的債務残高が金融資産として貨幣との代替性が強いのか、株式との代替性が強いのかによって、株式の名目収益率に与える影響が異なると考えられる。

(3) 金融資産間の代替性

金融資産間の代替性の観点から符号の確定していない π_b について分析する。

(14)(16) 式を考慮すると、

$$\pi_b = -\frac{\alpha_w(\varepsilon_r/\alpha_r - \varepsilon_w/\alpha_w)}{\alpha_i(\varepsilon_r/\alpha_r - \varepsilon_i/\alpha_i)} \quad (31)$$

と変形できる⁸⁾。

ここで、 α_r と ε_r はそれぞれ名目利子率の上昇（下落）に対する貨幣需要と株式需要の減少（増加）の大きさを表しているが、これについては以下のように考えよう。公的債務がほとんど発行されていない場合、公的債務は安全資産と考えられ株式よりも貨幣との代替性が強く ε_r/α_r は小さいと考えられる。

7) π_m に関しては、(14)(16) 式を考慮すると、

$$(1 - \alpha_w)\beta_r + \alpha_r\beta_w = (\beta_w + \varepsilon_w)\beta_r - (\beta_r + \varepsilon_r)\beta_w = \varepsilon_w\beta_r - \varepsilon_r\beta_w > 0$$

となり (30) 式を考慮すると、 $\pi_m < 0$ を得る。

8) (29) 式の分子は (14)(16) 式を考慮すると

$$\alpha_r(1 - \beta_w) + \alpha_w\beta_r = \alpha_r\varepsilon_w - \alpha_w\varepsilon_r = -\alpha_r\alpha_w(\varepsilon_r/\alpha_r - \varepsilon_w/\alpha_w)$$

となり、分母 Δ も

$$\alpha_i\beta_r - \alpha_r\beta_i = \alpha_r\varepsilon_i - \alpha_i\varepsilon_r = -\alpha_r\alpha_i(\varepsilon_r/\alpha_r - \varepsilon_i/\alpha_i)$$

と変形できる。これより、

$$\pi_b = -\alpha_w(\varepsilon_r/\alpha_r - \varepsilon_w/\alpha_w)/\alpha_i(\varepsilon_r/\alpha_r - \varepsilon_i/\alpha_i)$$

が得られる。

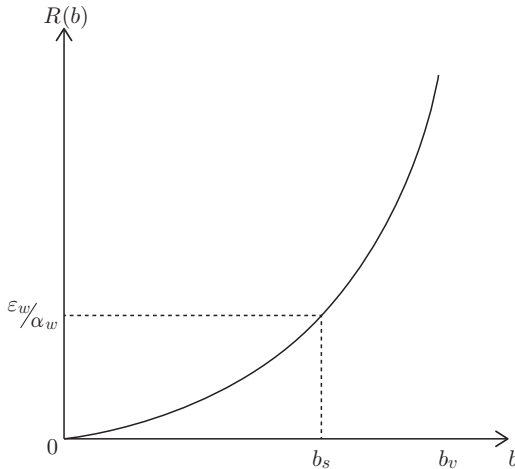
逆に、公的債務残高が累増すると、(26) 式からわかるように名目利子率が上昇し財政破綻のリスクも高まる⁹⁾。したがって、公的債務は安全資産ではなく株式と同様の収益性のある危険資産と見なされ、貨幣よりも株式との代替性が強くなり ε_r/α_r は大きくなると考えられる。このように、公的債務残高の増加に伴い公的債務は貨幣との代替性から株式との代替性を強めると仮定する。この仮定を定式化すると以下のように表すことができる¹⁰⁾。

仮定 1

$$\begin{aligned} \varepsilon_r/\alpha_r = R(b), \quad dR(b)/db > 0, \quad R(0) = 0, \quad R(b_s) = \varepsilon_w/\alpha_w, \\ R(b_v) = \infty \end{aligned} \quad (32)$$

これを図示したのが図 1 である¹¹⁾。

図 1 $R(b)$ 関数



9) 金融緩和政策がなければ、公的債務の増加は名目利子率を上昇させる。また、公的債務の累増は財政破綻の可能性を高め、公的債務は安全資産とは見なされなくなる。

10) ε_r/α_r は b 以外の変数にも依存しているが、以下では、(32) 式のように公的債務残高 GDP 比率のみの関数と仮定する。また、 ε_w 、 α_w 、 α_i 、 β_r 、 β_i に関しては一定と仮定する。

11) $R(b_v) = \infty$ の仮定は、公的債務残高 GDP 比率がある値 b_v まで増加すると、公的債務は株式と完全代替資産と見なされることを意味している。

さらに、(31)(32) 式から、

$$b = 0 \text{ のとき、 } \pi_b = -\varepsilon_w / \varepsilon_i < 0 \quad (33)$$

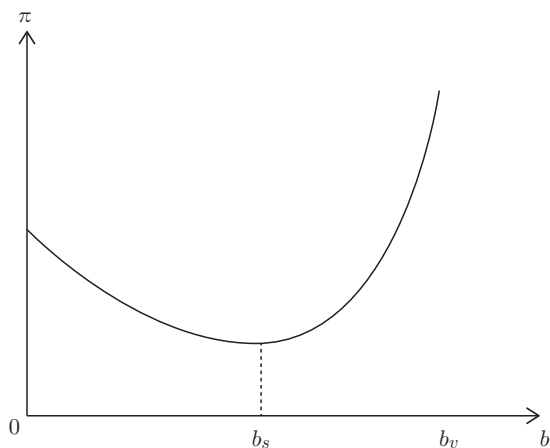
$$b = b_v \text{ のとき、 } \pi_b = -\alpha_w / \alpha_i > 0 \quad (34)$$

を得る。ところで、 b が b_v に達すると公的債務は株式と完全代替となり¹²⁾、逆に貨幣との代替性はゼロとなる¹³⁾。したがって、公的債務と完全代替である株式も貨幣との代替性がゼロになると考えられる。株式と貨幣の代替性がゼロであることは、 $\alpha_i = 0$ を意味するので、(34) 式より、

$$b = b_v \text{ のとき、 } \pi_b = \infty \quad (35)$$

が成立している。(32)(33)(35) 式を考慮すると、公的債務残高 GDP 比率 b と物価上昇率 π の関係は図 2 のように描くことができる。

図 2 π と b の関係



12) $\varepsilon_r = \infty$ を意味する。

13) $\alpha_r = 0$ を意味する。

2. 公開市場操作を伴う内生的成長モデル

本節では、政府予算制約を組み込んだ内生的成長モデルを構築する。その際、金融政策として中央銀行の公開市場操作をモデルに導入する。

(1) 公的債務残高成長率と GDP 成長率

いま、所得税率を t (＝一定) とすると、可処分所得 Y_D と税収 T は、それぞれ、

$$Y_D = (1 - t)(Y + rB/p) \quad (36)$$

$$T = t(Y + rB/p) \quad (37)$$

と表される。(36) 式からわかるように、家計の収入は所得と公的債務の利払いから構成される。また、政府支出は GDP の一定比率 g と仮定すると、

$$g = G/Y \quad (38)$$

となる。中央銀行の公的債務に対する公開市場操作が行われる場合、公的債務残高の変化は財政赤字による新規発行と公開市場操作による公的債務の変化から構成される。財政赤字に伴う公的債務残高の変化を \dot{B}_f 、公開市場操作による公的債務残高の変化を \dot{B}_o と表すと、公的債務残高の変化 \dot{B} は、

$$\dot{B} = \dot{B}_f + \dot{B}_o \quad (39)$$

と表される。財政赤字による公的債務残高の変化は政府の予算制約式を考慮すると、

$$\dot{B}_f/p = G + rB/p - t(Y + rB/p) \quad (40)$$

と表される。よって、公的債務残高の変化は、(39)(40) 式から、

$$\dot{B}/p = G + rB/p - t(Y + rB/p) + \dot{B}_o/p \quad (41)$$

となる。ここで、マネースtock M の変化は公的債務に対する公開市場操作によってのみ生じると仮定すると、

$$\dot{M} = -\dot{B}_o \quad (42)$$

と表すことができ、上式を (41) 式に代入すると、

$$\dot{B}/p = G + rB/p - t(Y + rB/p) - \dot{M}/p \quad (43)$$

を得る。さらに、両辺を Y で割って、(5)(6)(38) 式を考慮すると、

$$b(\dot{B}/B) = g + rb - t(1 + rb) - m(\dot{M}/M) \quad (44)$$

を得る。次に、貯蓄を S 、貯蓄性向を s とすると、貯蓄は以下のように表される。

$$S = sY_D \quad (45)$$

また、家計貯蓄は貨幣需要と株式、公的債務の購入に当てられるので、

$$S = \dot{M}/p + \dot{V}/p + \dot{B}/p \quad (46)$$

と表される。ここで、(17)(18) 式を考慮すると、

$$V/p = K \quad (47)$$

となる。(36)(45)(47) 式を家計の貯蓄式 (46) 式に代入すると、

$$s(1 - t)(Y + rB/p) = \dot{M}/p + \dot{B}/p + \dot{K} \quad (48)$$

となり、(48) 式の両辺を Y で割って (5)(6) 式を考慮すると、

$$\dot{K}/Y = s(1 - t)(1 + rb) - m(\dot{M}/M) - b(\dot{B}/B) \quad (49)$$

を得る。さらに、(19) 式を考慮すると次式を得る。

$$\dot{Y}/Y = A\{s(1 - t)(1 + rb) - m(\dot{M}/M) - b(\dot{B}/B)\} \quad (50)$$

ここで、政府支出と利払いの GDP に対する比率（政府支出・利払い GDP 比率）を δ と表し政策変数と仮定する。わが国の場合も財政赤字に関しては政府支出と利払いの合計額が絶えず問題とされており、現実的に妥当な仮定と考えられる。(6)(38) 式を考慮するなら δ は以下のように表される。

$$\delta \equiv g + rb \quad (51)$$

さらに、(51) 式を (44) 式に代入すると、

$$b(\dot{B}/B) = \delta - t(1 + rb) - m(\dot{M}/M) \quad (52)$$

となる。(52) 式を (50) 式に代入すると次式を得る。

$$\dot{Y}/Y = A[\{t + s(1-t)\}rb + \{t + s(1-t)\} - \delta] \quad (53)$$

最後に、マネースtock GDP 比率と公的債務残高 GDP 比率の変化率は (5)(6) 式より、

$$\dot{m}/m = \dot{M}/M - \dot{Y}/Y - \pi \quad (54)$$

$$\dot{b}/b = \dot{B}/B - \dot{Y}/Y - \pi \quad (55)$$

となる。

(2) 公的債務残高とマネースtock

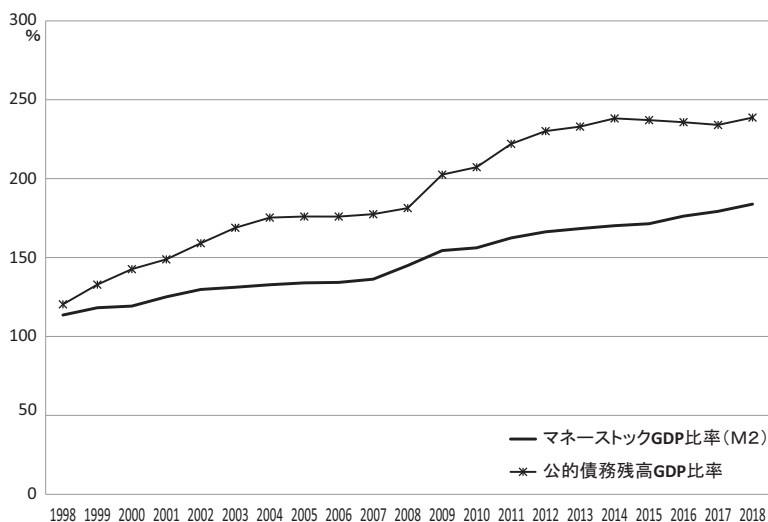
われわれのモデルには中央銀行の公開市場操作という金融政策が導入されているが、これはマネースtockの供給を意味する。中央銀行にとっては、公開市場操作はマネースtockの供給量を制御する手段であり¹⁴⁾、テーラー・ルールなどにしたがってマネースtockをコントロールしていると考えられるが、本稿では、公的債務残高を意識しながらマネースtockの供給量がコントロールされていると仮定しよう。特に、わが国において、公的債務残高 GDP 比率は主要先進国の中でも極端に高い一方で、1999 年以降、公的債務の買いオペを含む大規模な金融緩和政策がとられマネースtockが累増している。これは、公的債務残高を意識しながら金融緩和政策が行われていると考えることもできる。

実際、データで見ると、マネースtock GDP 比率の動きは公的債務残高 GDP 比率の動きと連動していると思われる。この関係を見るために、1998 年以降の公的債務残高 GDP 比率とマネースtock GDP 比率の推移を図示したのが図 3 である。ただし、図 3 ではマネースtockの定義としては M2 を用いている¹⁵⁾。図 3 からわかるように、公的債務残高 GDP 比率とマネースtock GDP 比率の推移は同じような動きをしている。M3 についても同様の図を描くと図 4 のように描ける。

14) 上での仮定したように、本稿ではマネースtockの制御手段としては公開市場操作のみを考えている。

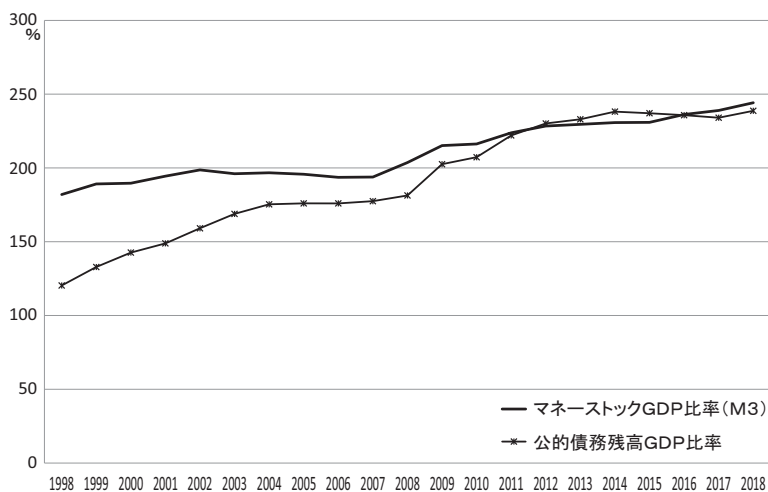
15) 2003 年以前のデータはマネーサプライのデータである。

図 3 マネースtock GDP 比率 (M2) と公的債務残高 GDP 比率



日本銀行通貨関連統計、内閣府 GDP 統計等より筆者作成

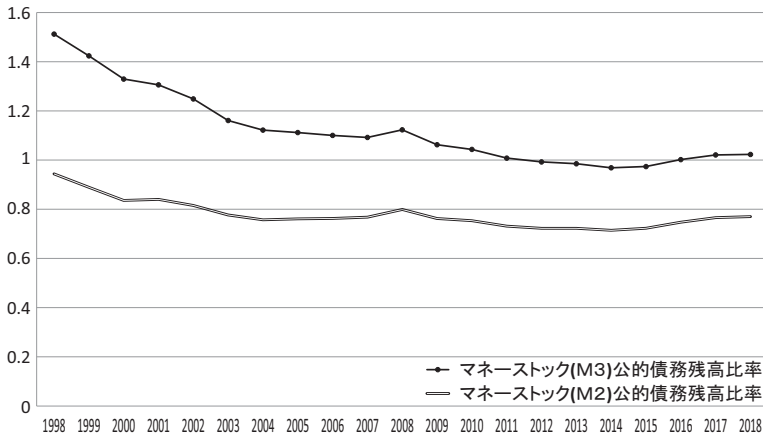
図 4 マネースtock GDP 比率 (M3) と公的債務残高 GDP 比率



日本銀行通貨関連統計、内閣府 GDP 統計等より筆者作成

さらに、公的債務残高に対するマネーストックの比率の推移を図示すると図5のように描ける。図5からわかるように、公的債務残高に対するマネーストックの比率は、2003年以降M2では0.7～0.8、M3では0.9～1.2の間を推移していることがわかる。

図5 マネーストック公的債務残高比率



日本銀行通貨関連統計、内閣府 GDP 統計等より筆者作成

図4からはM3に関して、マネーストック GDP 比率は2009年以降一定値に収束しつつあると観察することができ、また、図5からは2009年以降、公的債務残高に対する比率はM2、M3双方ともに一定の値を保っていると見ることができる。これらの観察に基づき、モデルの単純化のために中央銀行は公的債務に対する公開市場操作を実行する際にマネーストック GDP 比率を一定に保つか、公的債務残高に対するマネーストックの比率を一定に保つと仮定しよう。

3. 公的債務残高 GDP 比率と経済成長率

本節では前節までの議論を踏まえ、中央銀行が公開市場操作を実行する際に、マネーストック GDP 比率を一定に保つ、あるいは、公的債務残高に対するマネーストックの比率を一定に保つと仮定する。

(1) マネーストック GDP 比率が一定の場合

中央銀行が公開市場操作を実行する際に、マネーストック GDP 比率を一定に保つ場合、第 2 節のモデルでは、

$$m = \text{一定 (政策変数)} \quad (56)$$

と表される。さらに、(54)(56) 式を考慮すると、

$$\dot{M}/M = \dot{Y}/Y + \pi \quad (57)$$

を得る。(52)(53)(57) 式を (55) 式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{b} = & -A\{t + s(1-t)\}rb^2 \\ & - [\{Am(t + s(1-t)) + t\}r + A\{t + s(1-t) - \delta\} + \pi]b \\ & + \delta - t + Am\{\delta - t - s(1-t)\} - m\pi \end{aligned} \quad (58)$$

ここで、政府支出・利払い GDP 比率 δ はある程度の大きさと考え以下の仮定をおく。

仮定 2

$$\delta > t + s(1-t) + \pi/A \quad (59)$$

この仮定が成立する場合¹⁶⁾、(58) 式の \dot{b} 線は図 6 のように描くことができ体系は安定的であることがわかる¹⁷⁾。

また、(58) 式において $\dot{b} = 0$ とおき、政府支出・利払い GDP 比率 δ が増加した場合の公的債務残高 GDP 比率 b^* への影響を求めると、

$$db^*/d\delta = \{A(m + b^*) + 1\}/H \quad (60)$$

$$\begin{aligned} H = & A(t + s(1-t))((b^*)^2 r_b + 2b^* r) + \{A(t + s(1-t))m + t\}(r + b^* r_b) \\ & + A\{(t + s(1-t)) - \delta\} + \pi + (m + b^*)\pi_b \end{aligned} \quad (61)$$

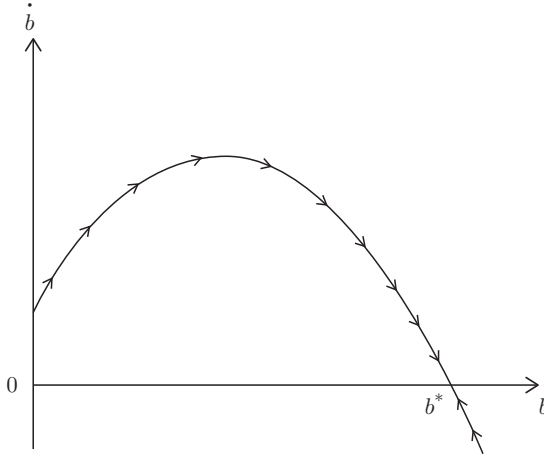
16) (59) 式より、

$Am\delta - Am(t + s(1-t)) - m\pi > 0$ 、および、 $\delta - t > 0$

を得、 \dot{b} 線の切片がプラスなる。

17) (24)(27) 式で表される r 関数と π 関数が b の多項式であったとしても、図 6 の基本的な形状は変わらない。

図 6 均衡の存在と安定性



となる。ここで、分母 H は、(35) 式より b^* が b_v に近づくと、 $\pi_b = \infty$ となり H は必ずプラスになる。

(2) 公的債務残高 GDP 比率と経済成長率

次に、政府支出・利払い GDP 比率 δ が上昇した場合の経済成長率への影響を見てみよう。政府支出・利払い GDP 比率 δ の上昇の経済成長率への影響は (53) 式を考慮すると、

$$\frac{d(\dot{Y}/Y)}{d\delta} = \frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial\delta} + \left(\frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial r} r_b + \frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial b^*} \right) \frac{db^*}{d\delta} \quad (62)$$

ように表される。(62) 式から、公的債務残高 GDP 比率の均衡値 b^* の変化に伴う経済成長率への影響は、

$$\frac{d(\dot{Y}/Y)}{db^*} = \frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial\delta} \frac{d\delta}{db^*} + \frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial r} r_b + \frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial b^*} \quad (63)$$

と求まる¹⁸⁾。(53) 式を考慮して計算すると、

18) (62) 式の両辺を、 $db^*/d\delta$ で割ると (63) 式が得られる。

$$\frac{d(\dot{Y}/Y)}{db^*} = \frac{A[A\{\delta - (t + s(1-t))(1 + rb^*)\} - \pi + s(1-t)(r + b^*r_b) - (m + b^*)\pi_b]}{A(m + b^*) + 1} \quad (64)$$

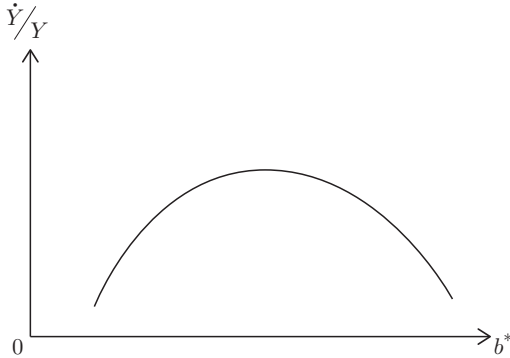
と求まり、次の命題 1 を得る¹⁹⁾。

命題 1

公開市場操作によりマネースtock GDP 比率が一定に保たれている場合、仮定 1 と仮定 2 の下では、 b^* が小さい場合は $d(\dot{Y}/Y)/db^* > 0$ が成立し、 b^* が大きくなると $d(\dot{Y}/Y)/db^* < 0$ となり、公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の間には非線型性が成立する。

この命題 1 から、公的債務残高 GDP 比率 b^* と経済成長率 \dot{Y}/Y の関係を描いたのが図 7 である。

図 7 経済成長率の非線形性



この公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の間に非線型性が生じるメカニズムは次のように考えられる。定常状態での公的債務残高の増加は公的債務残高 GDP 比率 b^* の上昇を意味し、(26) 式からわかるように、名目利子率を上昇

19) 証明に関しては、補論 A を参照されたい。

させ、家計の利払い収入が増え貯蓄が増加する。公的債務残高 GDP 比率が小さいときは、公的債務は安全資産として貨幣との代替性が強く、(33) 式から公的債務残高の増加は物価上昇率を引き下げる。この物価上昇率の低下は株式の名目収益率の下落を意味し、公的債務需要を増加させ公的債務残高の増加を吸収すると同時に、貨幣需要も増加させ公的債務の買いオペによるマネーストックの増加を吸収する²⁰⁾。さらに、公的債務残高と買いオペによるマネーストックの増加は株式需要を増加させ貯蓄の増加と相まって投資の増加をもたらす経済成長率を高めると考えられる。言い換えれば、家計の利払い収入の増加による貯蓄の増加と金融資産の増加が投資のクラウディング・イン効果をもたらす GDP 成長率が上昇することになる。この GDP 成長率の上昇によって、物価上昇率の低下と買いオペによるマネーストックの増加を相殺し (57) 式が成立する²¹⁾。

やがて、公的債務残高 GDP 比率が大きくなると、財政赤字の持続可能性の観点から公的債務が安全資産と見なされなくなり株式との代替性を強め、公的債務残高 GDP 比率の上昇は物価上昇率を高めるようになる²²⁾。物価上昇率が高くなると実質利払いが低下し貯蓄の増加が鈍化し投資がクラウド・アウトされ資本ストックの伸び率と GDP 成長率が低下する。このとき、マネーストック伸び率、物価上昇率の増加と GDP 成長率の低下によって (57) 式が成立するように調整される。

(3) マネーストック公的債務残高比率が一定の場合

次に、中央銀行が買いオペを実行する際に、マネーストック公的債務残高比率を一定に保つ場合を考えよう。この場合、第 2 節のモデルでは、 θ を定数として²³⁾、

20) 公的債務と貨幣の需要増加には公的債務残高とマネーストックの増加による資産効果も働いている。

21) マネーストック GDP 比率は政策変数で一定であり、さらに、定常状態ではマネーストックの変化率は公的債務残高の変化率と等しい。

22) (34) 式を意味している。

23) 第 2 節でも観察したように、2009 年以降の平均で見るとマネーストック公的債務残高比率は M2 の場合は 0.741、M3 の場合は 1.01 とほぼ一定の値で推移している。

$$\theta = m/b, \quad \theta > 0 \quad (65)$$

と表される。これより、

$$\dot{m}/m = \dot{b}/b \quad (66)$$

となるので、(54)(55) 式より、

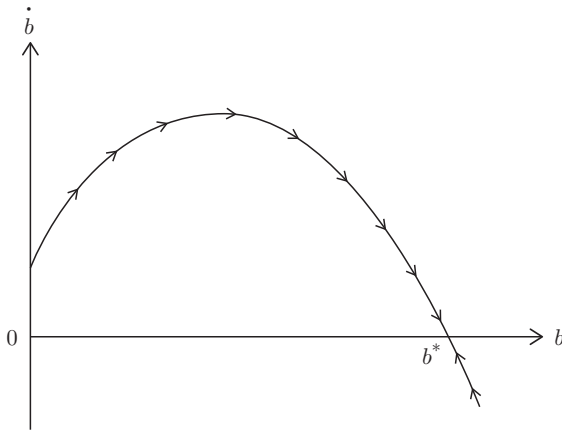
$$\dot{M}/M = \dot{B}/B \quad (67)$$

を得る。(52)(53)(65)(67) 式を考慮すると (55) 式は、

$$\begin{aligned} \dot{b} = & -A\{t + s(1-t)\}rb^2 + [A\{\delta - (t + s(1-t))\} - \pi - tr/(1+\theta)]b \\ & + (\delta - t)/(1+\theta) \end{aligned} \quad (68)$$

となる。ここで、政府支出・利払い GDP 比率 δ がある程度の大きさと考え仮定 2 を満たしているなら、 $\delta - t > 0$ を得²⁴⁾、 \dot{b} 線の切片はプラスとなり (68) 式は、図 6 と同様、図 8 のように描くことができ体系は安定的であることがわかる²⁵⁾。

図 8 均衡の存在と安定性



24) 仮定 2 より、 $\delta > t + s(1-t) + \pi/A > t$ となる。

25) 図 6 と同様に、(24)(27) 式で表される r 関数と π 関数が b の多項式であったとしても図 8 の基本的な形状は変わらない。

ここで、(68) 式において $\dot{b} = 0$ とおき、政府支出・利払い GDP 比率 δ が増加した場合の公的債務残高 GDP 比率 b^* への影響を求めると、

$$db^*/d\delta = \{(1 + \theta)Ab^* + 1\}/J \quad (69)$$

$$J = (1 + \theta)A(t + s(1 - t))((b^*)^2 r_b + 2b^* r) + t(r + b^* r_b) \\ - (1 + \theta)[A\{\delta - (t + s(1 - t))\} - \pi] + (1 + \theta)\pi_b \quad (70)$$

となる。ここで、(35) 式より b^* が b_v に近づくと、 $\pi_b = \infty$ となり分母 J は必ずプラスになる。

(4) 公的債務残高 GDP 比率と経済成長率

次に、政府支出・利払い GDP 比率 δ が上昇した場合の経済成長率への影響を見てみよう。政府支出・利払い GDP 比率 δ の上昇の経済成長率への影響は (53)(65) 式を考慮すると、

$$\frac{d(\dot{Y}/Y)}{d\delta} = \frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial\delta} + \left\{ \frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial r} (r_b + \theta r_m) + \frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial b^*} \right\} \frac{db^*}{d\delta} \quad (71)$$

ように表される。(71) 式から、公的債務残高 GDP 比率の均衡値 b^* の変化に伴う経済成長率への影響は、

$$\frac{d(\dot{Y}/Y)}{db^*} = \frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial\delta} \frac{d\delta}{db^*} + \frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial r} (r_b + \theta r_m) + \frac{\partial(\dot{Y}/Y)}{\partial b^*} \quad (72)$$

と求まり²⁶⁾、(53) 式を考慮して計算すると、

$$\frac{d(\dot{Y}/Y)}{db^*} = E/\{(1 + \theta)Ab^* + 1\} \quad (73)$$

$$E = -(1 + \theta)A(t + s(1 - t))rb^* + s(1 - t)(b^* r_b + r) \\ + (1 + \theta)A\{\delta - (t + s(1 - t))\} \\ + \{(1 + \theta)Ab^* + 1\}(t + s(1 - t))\theta b^* r_m - (1 + \theta)(\pi + \pi_b) \quad (74)$$

となる。これより次の命題 2 を得る²⁷⁾。

26) (71) 式の両辺を、 $db^*/d\delta$ で割ると (72) 式が得られる。

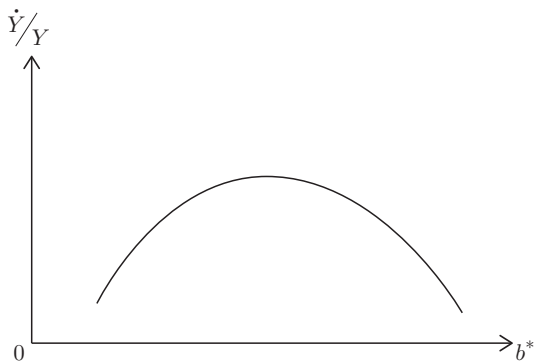
27) 証明に関しては、補論 B を参照されたい。

命題 2

公開市場操作によりマネースtock公的債務残高比率が一定に保たれている場合、仮定 1 と仮定 2 の下では、 b^* が小さい場合は $d(\dot{Y}/Y)/db^* > 0$ が成立し、 b^* が大きくなると $d(\dot{Y}/Y)/db^* < 0$ となり、公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の間には非線型性が成立する。

この命題から、公的債務残高 GDP 比率 b^* と経済成長率 \dot{Y}/Y の関係は図 9 のように描ける。この非線型性のメカニズムについては、命題 2 と同じメカニズムが働いている。

図 9 経済成長率の非線形性



(5) 公的債務残高 GDP 比率と利子率

最後に、公的債務残高 GDP 比率と利子率の関係について見ていこう。一般的には、公的債務残高 GDP 比率が上昇すると利子率は上昇すると考えられるが、いくつかの研究では公的債務残高 GDP 比率のある閾値までは、公的債務残高 GDP 比率の上昇とともに利子率は低下し、この閾値を超えると利子率が上昇するとの実証結果が報告されている²⁸⁾。しかしながら、公的債務残高

28) Ardagna, Caselli and Lane (2007)、Baum, Checherita-Westphal and Rother (2013) 等が挙げられる。Ardagna, Caselli and Lane (2007) ではこの閾値は 65%と推定され、Baum, Checherita-Westphal and Rother (2013) では 73.8%と報告されている。

GDP 比率の上昇に伴い利子率が低下するメカニズムについてはほとんど明らかにされていないのが現状である。以下では、マネースtock公的債務残高比率が一定である場合の公的債務残高 GDP 比率の利子率への影響を考察しよう。

(24)(65) 式を考慮すると、公的債務残高 GDP 比率の利子率への影響は、

$$dr/db^* = r_b + \theta r_m \quad (75)$$

と求まり、上式に (25)(26) 式を代入し整理すると、

$$\frac{dr}{db^*} = \frac{(1+\theta)}{\Delta} \left\{ \frac{\theta}{1+\theta} (\beta_w \varepsilon_i - \beta_i \varepsilon_w) + \frac{1}{1+\theta} (\alpha_i \varepsilon_w - \alpha_w \varepsilon_i) \right\} \quad (76)$$

となる²⁹⁾。ここで、(65) 式を考慮すると、

$$\theta/(1+\theta) = m/(m+b) \quad (77)$$

$$1/(1+\theta) = b/(m+b) \quad (78)$$

となるので、(76) 式は、

$$\frac{dr}{db^*} = \frac{(1+\theta)}{\Delta} \left\{ \frac{m}{m+b} (\beta_w \varepsilon_i - \beta_i \varepsilon_w) + \frac{b}{m+b} (\alpha_i \varepsilon_w - \alpha_w \varepsilon_i) \right\} \quad (79)$$

と変形できる。これより、以下の命題を得る。

命題 3

公開市場操作によりマネースtock公的債務残高比率が一定に保たれている場合、金融資産（貨幣と公的債務）に占める公的債務の割合が小さい（貨幣の占める割合が大きい）ときは公的債務残高 GDP 比率の上昇は利子率を低下させ、金融資産に占める公的債務の割合が大きいときは公的債務残高 GDP 比率の上昇は利子率を上昇させる³⁰⁾。

このメカニズムは次のように考えられる。金融資産に占める公的債務の割合が小さい（貨幣の占める割合が大きい）場合は、(77) 式よりマネースtock公的債務残高比率 θ が大きく、公的債務の増加による貨幣供給の増加は大きな

29) 計算については補論 C を参照のこと。

30) (2)~(4) (30) 式から、 $\beta_w \varepsilon_i - \beta_i \varepsilon_w > 0$ 、 $\alpha_i \varepsilon_w - \alpha_w \varepsilon_i < 0$ 、 $\Delta < 0$ であるので命題 3 を得る。

る³¹⁾。このため、公的債務の増加による利子率の上昇圧力よりも貨幣供給の増加による利子率の低下圧力が大きくなり利子率は低下する。他方、金融資産に占める公的債務の割合が大きい場合は、(78) 式よりマネースtock公的債務残高比率 θ が小さくなり、公的債務の増加による貨幣供給の増加は小さくなる。このため、公的債務の増加による利子率の上昇圧力が貨幣供給の増加による利子率の低下圧力よりも大きくなり結果として利子率は上昇する。

おわりに

本稿では、公的債務残高 GDP 比率と経済成長率との間の非線型関係を簡単な内生的成長モデルを用いて導出した。Arai, Kunieda and Nishida (2014) や村田 (2020) 等の研究では、Bohn (1998) の財政赤字の持続可能性条件を前提として、両者の間の非線型性が理論的に導かれていた。言い換えれば、特定の財政政策を前提として公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の非線型性が導かれていた。

本稿では、財政赤字の持続可能性の観点だけではなく、公的債務の金融資産としての役割に着目しモデル分析を行った。公的債務残高が小さいときは財政破綻の心配はなく公的債務は安全資産と見なされ貨幣との代替性が強いが、公的債務が累増すると財政破綻のリスクが大きくなり、公的債務は安全資産とはみなされず株式との代替性が強まると仮定した。このように、金融資産としての公的債務が他の資産（貨幣と株式）とどのような代替関係にあるかに注目し、また、1999 年以降、わが国で行われているような公開市場操作を通じた金融緩和政策を前提として、公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の関係を分析した。

その結果、公的債務残高 GDP 比率が上昇するにつれて公的債務は株式との代替性を強めること、および、財政赤字の大きさが一定以上であることを前提とするなら、公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の間には非線型的な関係が存在することが理論的に明らかになった。この非線型性は財政赤字の持続可能

31) (65) 式より、公的債務の増加 \dot{b} と貨幣の増加 \dot{m} の間には、 $\dot{m} = \theta \dot{b}$ の関係があるので、 θ が大きいときは、公的債務の増加に伴う貨幣供給の増加が大きくなる。

性の観点だけでなく、公的債務の金融資産としての特徴を考慮することによって導かれたものである。村田（2020）でも触れたように、公的過剰債務に関する研究は財政赤字や流動性制約の視点から考察されることが多いが、本稿での考察から、公的債務残高 GDP 比率と経済成長率の間の非線型性には公的債務の金融資産としての特徴が大きな役割を果たしていることが明らかになった。さらに、これまで理論的には全く研究されてこなかった、公的債務残高 GDP 比率と利率の間の非線型性についても、本稿では理論的に分析を行うことができた。これが可能となったのも、公的債務の金融資産としての役割に注目したことによる。

これまでの実証研究で明らかになった公的債務残高 GDP 比率と経済成長率や利率の間の非線型的関係は、理論的には財政赤字の持続可能性よりも公的債務の金融資産としての機能からもたらされていると結論付けることができる。

補論 A

$b^* = 0$ のとき (64) 式の分子は

$$A[A\{\delta - (t + s(1 - t))\} - \pi + s(1 - t)r - m\pi_b] \quad (\text{A-1})$$

となり、(33)(59) 式より、

$$\pi_b < 0 \quad (\text{A-2})$$

$$A\{\delta - (t + s(1 - t))\} - \pi > 0 \quad (\text{A-3})$$

となるので、 $b^* = 0$ のとき $d(\dot{Y}/Y)/db^* > 0$ となる。他方、 b^* が b_v に近づくと、(35) 式から π_b は ∞ に漸近するので $d(\dot{Y}/Y)/db^* < 0$ となる。

補論 B

$b^* = 0$ のとき (74) 式は

$$E = (1 + \theta)[A\{\delta - (t + s(1 - t))\} - \pi] + s(1 - t)r - (1 + \theta)\pi_b \quad (\text{B-1})$$

となり、(59) 式より第 1 項はプラスとなる。また、(33) 式より $\pi_b < 0$ であ

るので、 $b^* = 0$ のとき $d(\dot{Y}/Y)/db^* > 0$ となる。他方、 b^* が b_v に近づくと、(35) 式から π_b は ∞ に近づくので (74) 式は負となり、 $d(\dot{Y}/Y)/db^* < 0$ となる。

補論 C

(75) 式に (25)(26) 式を代入すると

$$r_b + \theta r_m = [\alpha_i(1 - \beta_w) + \alpha_w\beta_i - \theta\{\alpha_i\beta_w + (1 - \alpha_w)\beta_i\}]/\Delta \quad (C-1)$$

$$\text{ただし、}\Delta = \alpha_i\beta_r - \alpha_r\beta_i < 0$$

を得る。上式の分子は (15)(16) 式を考慮すると

$$\begin{aligned} & \alpha_i(1 - \beta_w) + \alpha_w\beta_i - \theta\{\alpha_i\beta_w + (1 - \alpha_w)\beta_i\} \\ &= \alpha_i - \theta\beta_i + (1 + \theta)(\alpha_w\beta_i - \alpha_i\beta_w) \\ &= \alpha_i\varepsilon_w - \alpha_w\varepsilon_i + \theta\{\alpha_i\varepsilon_w + (1 - \alpha_w)\varepsilon_i\} \\ &= \alpha_i\varepsilon_w - \alpha_w\varepsilon_i + \theta(\beta_w\varepsilon_i - \beta_i\varepsilon_w) \end{aligned} \quad (C-2)$$

となり、(C-1) 式に代入し整理すると (76) 式を得る。

参考文献

- Arai R., Kunieda T. and K.Nishida (2014), “Is public Debt Growth-Enhancing or Growth-Reducing ? ”, *KIER Discussion Paper Series*, no.884, pp.1-29.
- Ardayna S., Caselli F. and Lane T. (2007), “Fiscal Discipline and the Cost of Public Debt Service : Some Estimates for OECD Countries”, *The B.E. Journal of Macroeconomics*, vol.7, Issue 1.
- Arrow K.J. (1962), “The Economic Implications of Learning by Doing,” *Review of Economic Studies*, no.29, pp155-73.
- Aschauer D.A. (2000), “Do states optimize? Public capital and economic growth,” *The Annals of Regional Science*, no.34, pp.343-63.
- Barro R.J. (1990), “Government Spending in a Simple Model of Endogeneous Growth,” *Journal of Political Economy*, vol.98, no.5, S103-S125.
- Barro R.J.and Sala-i-Martin X. (1995), *Economic Growth*, McGraw Hill.

- Baum A., Checherita-Westphal C. and P. Rother (2013), Debt and growth : New evidence for the euro area,” *Journal of International money and Finance*, no.32, pp.809-821.
- Bohn H. (1998), “The Behavior of U.S. Public Debt and Deficits.” *The Quarterly Journal of Economics*, vol.113, no.3, pp.949-963.
- Bräuninger M. (2005), “The Budget Deficit, Public Debt, and Endogenous Growth,” *Journal of Public Economic Theory*, vol.7, No.5, pp.827-840.
- Cecchetti S.G., Mohanty M.S.and Zampolli F. (2011), “The Real Effects of Debt,” *BIS Working Papers*, No.352, pp.1-32.
- Checherita-Westphal C., Hallet A.H. and P. Rother (2012), “Fiscal Sustainability using Growth-Maximizing Debt Targets,” *Working Paper Series*, 1472, European Central Bank.
- Checherita-Westphal C. and P. Rother (2010), “The Impact of High Government Debt on Economic Growth and its Channels : An empirical investigation for the euro area,” *European Economic Review*, No.56, pp.1392-1405.
- Christopher S. A. and Bevan D.L. (2005), “Fiscal Deficits and Growth in Developing Countries”, *Journal of Public Economics*, vol.89, pp.571-97.
- Cohen D.,and McMenamin J.S. (1978), “The Role of Fiscal Policy in a Financially Disaggregated Macroeconomic Model”, *Journal of Money, Credit, and Banking*, vol.10, pp.322-36.
- Elmeskov J.and D.Sutherland (2012), “Post-Crisis Debt Overhang : Growth Implications across Countries,” *Second International Research Conference 2012*, Reserve Bank of India, pp.1-35.
- Friedman B.M. (1978), “Crowding Out or Crowding In ? Economic Consequence of Financing Government Deficits”, *Brooking Papers on Economic Activity*, vol.3, pp.593-641.
- Futagami K., Iwaisako T. and Ohdoi R. (2008), “Debt Policy Rule, Productive Government Spending, and Multiple Growth Path,” *Macroeconomic Dynamics*, vol.12, no.4, pp.445-62.
- Greiner A. and Semmler W. (2000), “Endogenous Growth, Government Debt and Budgetary Regimes,” *Journal of Macroeconomics*, vol.22, no.3, pp363-384.
- Greiner A. (2012), “Debt and Growth : Is There a Non- Monotonic Relation?,” *Working Papers in Economics and Management*, 04-2012, Bielefeld University.
- Hakkio C.S. and Rush M. (1991), “Is Budget Deficits ‘Too Large’ ?,” *Economic Inquiry*, vol.29, pp.429-45.

- Kumar M.S. and Woo J (2010), “Public Debt and Growth,” *IMF Working Paper*, 10/174, pp.1-46.
- Laubach T. (2009), “New Evidence on the Interest Rate Effects of Budget Deficits and Debt,” *Journal of European Economic Association*, vol.7, no.4, pp.858-885.
- Panizza U. and Presbitero A.F. (2013), “Public Debt and Economic Growth in Advanced Economies : A Survey,” *Swiss Society of Economics and Statistics*, vol.149, no.2, pp175-204.
- Reinhart C. M., and K.Rogoff (2010), “Growth in a Time of Debt,” *American Economic Review : Paper and Proceedings*, no.100, pp.573-578.
- Reinhart C. M., Reinhart V.R. and K.S.Rogoff (2012), “Public Debt Overhangs : Advanced-Economy Episodes Since 1800,” *Journal of Economic Perspectives*, vol.26, no.3, pp69-86.
- Reinhart C. M., Reinhart V.R. and K.S.Rogoff (2015), “Dealing with Debt,” *Faculty Research Working Paper Series*, RWP15-009, Harvard Kennedy School.
- Rogoff K.S. (2015), “Debt Supercycle, not Secular Stagnation,” *VOX,CEPR Policy Portal*.
- Romer P.M. (1986), “Increasing Returns and Long-Run Growth,” *Journal of Political Economy*, ol.94, no.5, pp.1002-37.
- Saint-Paul G. (1992), “Fiscal Policy in an Endogenous Growth Model,” *Quarterly Journal of Economics*, vol.107, no.4, pp.1243-1259.
- Sheshinski E. (1967), “Optimal Accumulation with Learning by Doing,” in Shell K.,ed., *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, MIT Press.
- Tobin J. (1969), “A General Equilibrium Approach to Monetary Theory”, *Journal of Money, Credit, and Banking*, vol.1, pp.15-29.
- Woodford M. (1990), “Public Debt as Private Liquidity,” *American Economic Review : Papers and Proceedings*, Vol.80, No.2, pp.382-88.
- 村田 治 (1996), 『公債と財政赤字のマクロ理論』、有斐閣。
- 村田 治 (2020)、「公的過剰債務と経済成長」、『経済学論究』、第 74 巻、第 1 号、pp.39-71。